SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Giovanna Citti

REGOLARITÀ PER GRAFICI NON LEVI PIATTI

12 giugno 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Sunto L'equazione di Levi è soddisfatta dalle funzioni u, il cui grafico ha curvatura di Levi prefissata k in ogni punto, e si esprime nel modo seguente:

$$X^2u + Y^2u - u_t[X,Y]u = k(1 + |Xu|^2 + |Yu|^2)^{3/2}(1 + u_t^2)^{-1/2}$$

per opportuni campi vettoriali nonlineari X e Y, che dipendono dal gradiente di u. I campi X e Y sono definiti in modo tale che la struttura dell'algebra di Lie da essi generata dipende dagli zeri di k. Noi supponiamo che k abbia soltanto zeri di ordine 1 rispetto ai campi, e proviamo il seguente risultato di regolarità: *Se* $q \in C^\infty(\Omega)$ u *è una soluzione di classe* $C^{3,\alpha}$, *con* $\alpha > 1/2$, *allora* $u \in C^\infty$.

Abstract We consider the equation of functions u, whose graph has at every point prescribed Levi curvature k:

$$X^2u + Y^2u - u_t[X,Y]u = k(1 + |Xu|^2 + |Yu|^2)^{3/2}(1 + u_t^2)^{-1/2}$$

for suitable nonlinear vector fields X and Y, dependent on the gradient of u. The vector fields X and Y are defined in such a way that their generated Lie algebra depends on the zeros of k. We assume that k has only zeros of order 1 with respect to these vector fields, and prove the following regularity result:

If u *is a solution of class* $C^{3,\alpha}$, *and* $\alpha > 1/2$, *then* $u \in C^\infty$.

1 Introduzione

Presentiamo un risultato di regolarità per le soluzioni dell'equazione di Levi in R^3. Indichiamo (x, y, t) gli elementi dello spazio, e X e Y i campi vettoriali

$$X = \partial_x + a\partial_t, \quad Y = \partial_x + b\partial_t, \tag{1}$$

dove

$$a = \frac{u_y - u_x u_t}{1 + u_t^2} \quad \text{e} \quad b = -\frac{u_x + u_y u_t}{1 + u_t^2}. \tag{2}$$

Allora l'operatore di Levi è definito

$$\mathcal{L}u = X^2 u + Y^2 u - u_t [X, Y]u. \tag{3}$$

Fissata un funzione $k : \Omega \to R$ si dice equazione di Levi l'equazione delle funzioni il cui grafico ha curvatura di Levi prefissata k, che si scrive

$$\mathcal{L}u = k(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(1 + u_t^2)^{1/2}. \tag{4}$$

Si tratta pertanto di un'equazione somma di quadrati di campi vettoriali non lineari. Per operator lineari scritti formalmente come $\mathcal{L}$ si conoscono risultati di regolarità sotto la ben nota condizione di Hörmander per l'ipoellitticità. I campi X e Y qui considerati sono nonlineari, ma verificano la condizione seguente, che è l'analogo di quella condizione in questo contesto. Infatti il commutatore dei campi si può calcolare come segue:

$$[X, Y] = -\frac{\mathcal{L}u}{(1 + u_t^2)^{1/2}}\partial_t = -k\frac{(1 + a^2 + b^2)^{3/2}}{(1 + u_t^2)^{1/2}}\partial_t. \tag{5}$$

Pertanto ipotesi di segno su k, o sulle sue derivate sono ipotesi di lineare indipendenza sui campi vettoriali X e Y, e diversi risultati di regolarità delle soluzioni sono stati ottenuti sotto diverse ipotesi su k.

Se k è identicamente nulla l'equazione si può studiare con tecniche di geometria complessa. Bedford e Gaveau hanno infatti dimostrato il risultato seguente, che enunciamo in coordinate complesse. Sia ϕ è una funzione di classe $C^{m+5}(\partial\Omega)$, e supponiamo che esistano due punti p_1 e $p_2 \in \partial\Omega$ dove lo spazio tangente al grafico di ϕ è una retta complessa in C^2, e questi punti siano ellittici. Allora il problema

$$\begin{cases} L(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \phi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha una soluzione di classe $C^{m+\alpha}(\Omega \backslash \{p_1, p_2\}) \cap Lip(\bar{\Omega})$ (vedi [BG]).

La tecnica utilizzata si basa sul teorema di Bishov sulle famiglie di dischi analitici, e non si presta ad essere generalizzata per k diverso da 0.

Se invece supponiamo che $k(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in \Omega$, da (5) segue che

$$X, \ Y \ e \ [X, Y] \text{ sono linearmente indipendenti in ogni punto.} \tag{6}$$

Allora l'algebra di Lie generata da X e Y ha, fino al secondo ordine, la stessa struttura dell'algebra di Heisenberg. Usando questa osservazione, e le proprietà di regolarità del Laplaciano subellittico sul gruppo, l'autore ha provato in [C] che *Ogni soluzione u di (4) di classe $C^{2,\alpha}_{\mathcal{L}}$, con $\alpha > \frac{1}{2}$, è di classe $C^\infty(\Omega)$.*

Qui presento un risultato analogo, provato in collaborazione con Annamaria Montanari, sotto ipotesi piú deboli su k (si veda [CM]). Precisamente

Teorema 1.1 *Supponiamo che $k \in C^\infty(\Omega)$, che u sia un soluzione di (4) di classe $C^{3,\alpha}$, con $\alpha > 1/2$. Supponiamo anche che*

$$\forall \xi \in \Omega \quad k(\xi) \neq 0 \text{ oppure } Xk(\xi) \neq 0 \text{ oppure } Yk(\xi) \neq 0,$$

allora $u \in C^\infty$.

2 Il metodo di congelamento

Per il risultato precedente occorre studiare la regolarità delle soluzioni soltanto in un intorno degli zeri di k. Supponiamo pertanto che esista un punto $\bar{\xi} \in \Omega$ tale che

$$k(\bar{\xi}) = 0 \quad \text{e} \quad Xk(\bar{\xi}) \neq 0.$$

Per motivi di tipo tecnico introdurremo una nuova variabile s e scriveremo $\mathcal{L}$ nel modo seguente:

$$\mathcal{L}u = X^2u + Y^2u + S \tag{7}$$

con S definita da

$$S = -u_t[X, Y] + \partial_s.$$

Per operatori scritti formalmente in questo modo i campi X e Y giocano un ruolo analogo alla derivata spaziale per operatori parabolici, mentre S è l'analogo della derivata temporale. Pertanto diremo che X e Y hanno peso 1, che S ha peso 2 e tutti i commutatori di ordine superiore saranno pesati di conseguenza.

Ora utilizziamo un metodo di freezing intorno al punto $\bar{\xi}$. In altre parole associamo ad ogni punto ξ_0 tre campi vettoriali X_{ξ_0}, Y_{ξ_0} S_{ξ_0} che siano lineari, nilpotenti e che, nel punto fissato ξ_0 generino la stessa algebra di Lie di X, Y e S. Se $\xi_0 = \bar{\xi}$, allora per (5)

$$[X, Y]_{|\bar{\xi}} = 0 \quad [X, [X, Y]]_{|\bar{\xi}} = -Xk(\bar{\xi}) \frac{(1 + a^2 + b^2)^{3/2}}{(1 + u_t^2)^{1/2}} \partial_t, \tag{8}$$

pertanto abbiamo bisogno almeno di tre ordini di commutatori per generare tutta l'algebra di Lie nel punto $\bar{\xi}$. D'altra parte in ogni intorno del punto $\bar{\xi}$ ci sono punti ξ_0 tali che $k(\xi_0) \neq 0$. Pertanto

$$X_{|\xi_0}, Y_{|\xi_0}, \text{ e } [X, Y]_{|\xi_0},$$

sono linearmente indipendenti, e abbiamo bisogno soltanto di due commutatori per generare tutta l'algebra. In altre parole l'algebra di Lie associata in modo naïve all'operatore è diversa da un punto all'altro. Se invece vogliamo associare ad ogni punto lo stesso gruppo, possiamo applicare un procedimento di lifting, simile a quello introdotto da Rotschild e Stein, nel caso lineare.

Per esempio possiamo introdurre una nuova variabile z_1, e porre

$$\tilde{X} = X - y\partial_{z_1}.$$

In questo modo $[\tilde{X}, Y]$ risulta linearmente indipendente da tutti i commutatori di ordine 3 in ogni punto. Aggiungendo un numero opportuno di variabili possiamo definire nuovi campi vettoriali $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ e $\tilde{S}$ che generano la stessa algebra di Lie in ogni punto, e che sono liberi fino al peso 3, cioè soddisfano il minimo numero possibile di relazioni ad ogni punto e generano lo spazio tangente in ogni punto. La scelta di campi vettoriali non è unica, e noi abbiamo considerato la seguente;

$$\begin{cases} \tilde{X} = X - y\partial_{z_1} - \frac{y^2}{2}\partial_{z_4} \\ \tilde{Y} = Y - s\partial_{z_2} \\ \tilde{S} = S - x\partial_{z_3}. \end{cases} \tag{9}$$

Come prima diciamo che $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ hanno peso 1, e $\tilde{S}$ ha peso 2.

Avendo aumentato il numero delle variabili che compaiono nei campi vettoriali indichiamo $U = \Omega \times R^5$, e, se $\bar{\xi}$ è il punto in cui k si annulla, poniamo $\tilde{\xi} = (\bar{\xi}, 0)$. Se u è la fissata soluzione di classe $C^{3,\alpha}(\Omega)$ dell'equazione (4), possiamo estenderla ad una funzione definita su tutto U ed indipendente dalle variabili $s, z_1, ..., z_4$. Se indichiamo ancora con u questa nuova funzione, essa risulta soluzione dell'equazione

$$\tilde{\mathcal{L}}u = k(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(1 + u_t^2)^{1/2} \text{ in } \Omega \times R^5. \tag{10}$$

Per la regolarità di u e la condizione (5) il campo $[X, Y]$ è di classe C^2, quindi $[\tilde{X}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]]$ e $[\tilde{Y}, [\tilde{X}, \tilde{Y}]]$ sono di classe C^1. Inoltre $\tilde{S}$ è di classe C^2, e quindi i coefficienti di $[\tilde{X}, \tilde{S}]$ e $[\tilde{Y}, \tilde{S}]$ sono di classe C^1. In altre parole i campi e i loro commutatori fino all'ordine 3, cioè quelli che generano l'algebra di Lie sono di classe C^1. Pertanto è ben definita una distanza nel senso di [NSW], che indicheremo con d.

Possiamo ora definire oppurtune classi di funzioni, associate in modo naturale all'operatore $\mathcal{L}$ e alla soluzione u. Diremo che una funzione è di classe $C^1_{\mathcal{L}}(U)$ se $\tilde{X}f$ e $\tilde{Y}f$ esistono e sono continui, mentre, se a e b sono di classe $C^{m-1}_{\mathcal{L}}(U)$, indichiamo $C^m_{\mathcal{L}}(U)$ l'insieme delle funzioni che hanno tutte le derivate continue fino all'ordine m. La condizione di regolarità sui coefficienti garantisce in particolare che, se $f \in C^m(U)$ in senso euclideo, allora $f \in C^m_{\mathcal{L}}(U)$. Il viceversa ovviamente non è vero, ma se $f \in C^{3m}_{\mathcal{L}}(U)$, allora $f \in C^m(U)$. Quindi, per provare che $u \in C^\infty(U)$, basta provare che $a, b, u \in C^\infty_{\mathcal{L}}(U)$.

Diremo che $f \in C^{\alpha}_{\mathcal{L}}(U)$ se esiste $C > 0$ tale che

$$|f(\xi) - f(\xi_0)| \leq C d^{\alpha}(\xi, \xi_0) \quad \forall \xi, \xi_0 \in U.$$

Analogamente $f \in C^{k,\alpha}_{\mathcal{L}}(U)$ se ha tutte le derivate di peso k in $C^{\alpha}_{\mathcal{L}}(U)$.

Ogni funzione sufficientemente regolare ammette uno sviluppo di Taylor nella direzione dei campi. Precisamente:

Osservazione 2.1 *Sia $f \in C^{2,\alpha}_{\mathcal{L}}(U)$, allora f ha il seguente sviluppo di Taylor di ordine 1 e 2 nella direzione dei campi:*

$$f(\xi) = P^k_{\xi_0} f(\xi) + O(d^{k+\alpha}(\xi, \xi_0)), \quad k = 1, 2,$$

dove, se indichiamo $D_1 = \tilde{X}$, $D_2 = \tilde{Y}$, $D_3 = \tilde{S}$, $D_4 = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$, e $(e_1, ...e_8)$ sono le coordinate canoniche di ξ attorno a ξ_0,

$$P^1_{\xi_0} f(\xi) = f(\xi_0) + \sum_{i=1}^{2} e_i D_i f(\xi_0),$$

$$P^2_{\xi_0} f(\xi) = f(\xi_0) + \sum_{i=1}^{4} e_i D_i f(\xi_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} e_i e_j D_{i,j} f(\xi_0).$$

Ora possiamo introdurre nuovi campi vettoriali X_{ξ_0}, Y_{ξ_0}, e S_{ξ_0}, in modo tale che l'algebra di Lie generata abbia la stessa struttura dell'algebra di Lie generata da $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, e $\tilde{S}$. Poiché dobbiamo calcolare i commutatori fino all'ordine 3 di $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$, definiamo i loro congelati, sostituendo ai coefficienti a e b, il loro polinomio di Taylor di ordine 2. Dovendo invece calcolare soltanto commutatori di ordine 2 di $\tilde{S}$, consideriamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine del suo coefficiente.

$$\begin{cases} X_{\xi_0} = \partial_x + P^2_{\xi_0} a \partial_t - y \partial_{z_1} - \frac{y^2}{2} \partial_{z_4} \\ Y_{\xi_0} = \partial_y + P^2_{\xi_0} b \partial_t - s \partial_{z_2} \\ S_{\xi_0} = \partial_s - x \partial_{z_3} - P^1_{\xi_0}(u_t(Xb - Ya)) \partial_t. \end{cases} \tag{11}$$

L'operatore congelato di $\tilde{\mathcal{L}}$ sarà formalmente definito come in (7) in termini di X_{ξ_0}, Y_{ξ_0} e S_{ξ_0}

$$L_{\xi_0} = X^2_{\xi_0} + Y^2_{\xi_0} + S_{\xi_0}. \tag{12}$$

L_{ξ_0} è somma di quadrati di campi vettoriali di classe C^{∞} che soddisfano la condizione di Hörmander, pertanto esiste una distanza d_{ξ_0} e una soluzione fondamentale Γ_{ξ_0} associata a L_{ξ_0}. Infatti, a causa della condizione (8), la dimensione omogenea dello spazio è $q = 18$ e Γ_{ξ_0} è localmente equavalente a $d^{-q+2}_{\xi_0}$. La distanza $d_{\xi_0}(\xi_0, .)$ è inoltre localmente equavalente a $d(\xi_0, .)$.

Per costruzione l'algebra di Lie generata da X_{ξ_0} e Y_{ξ_0} ha la stessa struttura in ogni punto, pertanto il cambiamento di variabili canonico ϕ_{ξ_0} trasforma X_{ξ_0}

e Y_{ξ_0} in campi vettoriali lineari $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ di classe C^∞, nilpotenti ed indipendenti da ξ_0.

In altre parole, se $\forall u : R^3 \to R$ poniamo

$$\bar{u} = u \circ \phi_{\xi_0}^{-1},$$

allora

$$X_{\xi_0} u(\xi) = \bar{X}\bar{u}(\phi_{\xi_0}(\xi)).$$

Pertanto l'operatore L_{ξ_0} è trasformato da ϕ_{ξ_0} nel seguente:

$$\bar{L} = \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{S}.$$

Se denotiamo $\bar{\Gamma}$ la sua soluzione fondamentale e $\bar{d}$ la distanza naturale allora $\bar{\Gamma}$ è localmente equivalente a $\bar{d}^{2-q}$. Inoltre

$$\Gamma_{\xi_0}(\xi, \zeta) = \bar{\Gamma}(\phi_{\xi_0}(\xi), \phi_{\xi_0}(\zeta))$$

e

$$d_{\xi_0}(\xi, \zeta) = \bar{d}(\phi_{\xi_0}(\xi), \phi_{\xi_0}(\zeta)). \tag{13}$$

In conseguenza, utilizzando la stima di $\tilde{\Gamma}$ e la formula di Campbell Hausdorff non è difficile studiare la dipendenza di $\Gamma_{\xi_0}(\xi_0, \zeta)$ dalla variabile ξ_0. Precisamente

Proposizione 2.1 *Ci sono due costanti C_3 e C_4 indipendenti da ξ e ξ_0 tali che per ogni coppia di punti ξ_0 e ξ in U, Γ_{ξ_0} e Γ_ξ soddisfano la stima:*

$$|\Gamma_{\xi_0}(\xi_0, \zeta) - \Gamma_\xi(\xi, \zeta)| \leq C_3 \left(\frac{d(\xi_0, \xi)}{d^{q-1}(\xi_0, \zeta)} + \frac{d^\alpha(\xi_0, \xi)}{d^{q-2}(\xi_0, \zeta)} \right).$$

sull'insieme $D = \{\zeta : d(\xi, \zeta) \geq C_4 d(\xi, \xi_0)\}$.

3 L'operatore linearizzato

In questo capitolo supponiamo che u sia una fissata soluzione di (4), di classe $C^{3,\alpha}$ (in senso euclideo). Ovviamente abbiamo $u \in C^{3,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$, $a, b \in C^{2,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$ e $\partial_t a \in C^{1,\alpha}_{\mathcal{L},loc}(U)$. I campi vettoriali $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ possono allora essere considerati operatori lineari a coefficienti a e b, e conseguentemente L_u indica l' operatore lineare a coefficienti $C^{2,\alpha}$

$$L_u = \tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 + \tilde{S}.$$

Dapprima proviamo una formula di rappresentazione per funzioni di classe $C^{3,\alpha}_{\mathcal{L}}$, poi deduciamo da questa un risultato di regolarità. Poiché è un risultato di tipo locale, possiamo scegliere degli insiemi $U \subset\subset U_1 \subset\subset \Omega \times R^5$, ed una funzione $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times R^5)$ tale che $\phi \equiv 1$ on U_1. In questo modo $v_{|U} = (v\phi)_{|U}$.

Teorema 3.1 *Supponiamo che v sia una funzione di classe $C^{3,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$, tale che $\partial_t v \in C^{1,\alpha}_{\mathcal{L},loc}(U)$. Allora per ogni ξ e $\xi_0 \in U$ possiamo rappresentare $v(\xi) = v\phi(\xi)$ come segue:*

$$\phi v(\xi) = A(\xi,\xi_0) + B(\xi,\xi_0) + C(\xi,\xi_0),$$

dove

$$A(\xi,\xi_0) = \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) L_u v(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta,$$

$$\begin{aligned}
B(\xi,\xi_0) = &- \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(a(\zeta) - P^2_{\xi_0}a(\zeta)\big)\big(\tilde{X}\partial_t v(\zeta) - \tilde{X}\partial_t v(\xi_0)\big)\phi(\zeta)d\zeta \\
&-2\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(a(\zeta) - P^2_{\xi_0}a(\zeta)\big)\tilde{X}\partial_t v(\xi_0)\phi(\zeta)d\zeta \\
&+\int \tilde{X}_{\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(a(\zeta) - P^2_{\xi_0}a(\zeta)\big)\big(\partial_t v(\zeta) - P^1_{\xi_0}\partial_t v(\zeta)\big)\phi(\zeta)d\zeta \\
&+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(Xa(\zeta) - P^1_{\xi_0}(Xa)(\zeta)\big)\big(\partial_t v(\zeta) - P^1_{\xi_0}\partial_t v(\zeta)\big)\phi(\zeta)d\zeta \\
&-\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(a(\zeta) - P^2_{\xi_0}(a)(\zeta)\big)\partial_t a(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta) - P^1_{\xi_0}\partial_t v(\zeta)\big)\phi(\zeta)d\zeta \\
&+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(a(\zeta) - P^2_{\xi_0}a(\zeta)\big)\big(\partial_t v(\zeta) - P^1_{\xi_0}\partial_t v(\zeta)\big)X_{\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta \\
&-\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(b(\zeta) - P^2_{\xi_0}b(\zeta)\big)\big(\tilde{Y}\partial_t v(\zeta) - \tilde{Y}\partial_t v(\xi_0)\big)\phi(\zeta)d\zeta \\
&-2\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(b(\zeta) - P^2_{\xi_0}b(\zeta)\big)\tilde{Y}\partial_t v(\xi_0)\phi(\zeta)d\zeta \\
&+\int \tilde{Y}_{\xi_0}\Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(b(\zeta) - P^2_{\xi_0}b(\zeta)\big)\big(\partial_t v(\zeta) - P^1_{\xi_0}\partial_t v(\zeta)\big)\phi(\zeta)d\zeta \\
&+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(Yb(\zeta) - P^1_{\xi_0}(Yb)(\zeta)\big)\big(\partial_t v(\zeta) - P^1_{\xi_0}\partial_t v(\zeta)\big)\phi(\zeta)d\zeta \\
&-\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(b(\zeta) - P^2_{\xi_0}(b)(\zeta)\big)\partial_t b(\zeta)\big(\partial_t v(\zeta) - P^1_{\xi_0}\partial_t v(\zeta)\big)\phi(\zeta)d\zeta \\
&+\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\big(b(\zeta) - P^2_{\xi_0}b(\zeta)\big)\big(\partial_t v(\zeta) - P^1_{\xi_0}\partial_t v(\zeta)\big)Y_{\xi_0}\phi(\zeta)d\zeta,
\end{aligned}$$

e

$$C(\xi,\xi_0) = \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)\Big(v(\zeta)\Lambda_{\xi_0}\phi(\zeta) + 2X_{\xi_0}v(\zeta)X_{\xi_0}\phi(\zeta) + 2Y_{\xi_0}v(\zeta)Y_{\xi_0}\phi(\zeta)\Big)d\zeta.$$

Prova

$$v\phi(\xi) = \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) L_{\xi_0}(v\phi)(\zeta)d\zeta =$$

$$= \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) L_{\xi_0} v(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta + C(\xi,\xi_0) =$$

$$= \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) L_u v(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta + C(\xi,\xi_0)$$

$$+ \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta)(L_{\xi_0} v(\zeta) - L_u v(\zeta))\phi(\zeta)d\zeta + C(\xi,\xi_0).$$

L'affermazione si ottiene esplicitando le funzioni integrande, e con oppurtune integrazioni per parti.

Dalla formula di rappresentazione si deducono alcuni risultati di regolarità per soluzioni dell'equazione $L_u v = f$. Precisamente:

Teorema 3.2 *Sia f sia una funzione di classe $C^{k-1,\alpha}_{\mathcal{L}}$ con $k = 2$ oppure 3. Supponiamo poi che i coefficienti a e b di L_u siano di classe $C^{k,\alpha}_{\mathcal{L}}$, e derivabili rispetto a t con derivata di classe $C^{\alpha}_{\mathcal{L}}$. Se v è una soluzione di $L_u v = f$, di classe $C^{k,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$ tale che $\partial_t v \in C^{1,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$, allora $v \in C^{k+1,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$.*

Un teorema analogo vale per funzioni piú regolari.

Teorema 3.3 *Sia f sia una funzione di classe $C^{k-1,\alpha}_{\mathcal{L}}$ con $k \geq 4$. Supponiamo poi che i coefficienti a e b di $\mathcal{L}$ siano di classe $C^{k,\alpha}_{\mathcal{L}}$. Se v è una soluzione di $\mathcal{L}u = f$, di classe $C^{k,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$ allora $u \in C^{k+1,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$.*

4 Prova del Teorema 1.1

Per quanto riguarda l'equazione non lineare (4) il secondo membro, che indicheremo $\mathcal{M}u$, deve essere considerato un operatore completamente non lineare, poiché dipende da ∂_t. Poniamo per semplicità

$$q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \quad \text{e} \quad f = k(1+a^2+b^2)^{3/2},$$

in modo che

$$\mathcal{M}u = q(\tau) f(\zeta).$$

Allora è naturale chiamare operatore linearizzato di $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M}_u = f q'(\partial_t u)\partial_t$$

e operatore congelato

$$M_{\xi_0} = P^1_{\xi_0}(f q'(\partial_t u))\partial_t.$$

Nel seguito chiameremo anche

$$\Lambda_{\xi_0} = L_{\xi_0} - M_{\xi_0}.$$

Vale allora una formula di rappresentazione analoga alla precedente, anche per le soluzioni dell'equazione (4), in termini dell'operatore Λ_{ξ_0}.

Precisamente, se ϕ è definita come sopra:

Teorema 4.1 *Sia u soluzione dell'equaz'ione (4) tale che $u \in C^{3,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$, e $\partial_t a \in C^{1,\alpha}_{\mathcal{L},loc}(U)$. Allora per ogni ξ e $\xi_0 \in U$ possiamo rappresentare $u(\xi) = u\phi(\xi)$ nel modo seguente:*

$$\phi u(\xi) = B(\xi, \xi_0) + C(\xi, \xi_0) + D(\xi, \xi_0),$$

dove B e C sono definite nel Teorema 3.1, mentre

$$\begin{aligned} D(\xi,\xi_0) = &\int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) f(\zeta) \Big(q(\partial_t u) - q(P^1_{\xi_0}\partial_t u) - q'(P^1_{\xi_0}\partial_t u)(\partial_t u - P^1_{\xi_0}\partial_t u) \Big) \phi(\zeta) d\zeta \\ &+ \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) \Big(f(\zeta) - P^3_{\xi_0} f(\zeta) \Big) q(P^1_{\xi_0}\partial_t u) \phi(\zeta) d\zeta \\ &+ \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) P^3_{\xi_0} f(\zeta) q(P^1_{\xi_0}\partial_t u) \phi(\zeta) d\zeta \\ &- \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) f(\zeta) \Big(q'(\partial_t u) - q'(P^1_{\xi_0}\partial_t u) \Big) \Big(\partial_t u - P^1_{\xi_0}\partial_t u \Big) \phi(\zeta) d\zeta \\ &+ \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) \Big(f(\zeta) q'(\partial_t u) - P^1_{\xi_0} f q'(\partial_t u) \Big) \Big(\partial_t u - P^1_{\xi_0}\partial_t u \Big) \phi(\zeta) d\zeta \\ &- \int \Gamma_{\xi_0}(\xi,\zeta) P^1_{\xi_0}(f q'(\partial_t u)) P^1_{\xi_0}\partial_t u(\zeta) \phi(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

La prova del Teorema 1.1 si può ora ottenere in due passi: prima si prova che Xu, Yu e $\partial_t u$ sono di classe $C^{4,\alpha}_{\mathcal{L}}$, poi si applica un metodo iterativo per ottenere che $u \in C^\infty$. Per definizione, per poter parlare di funzioni di classe $C^{4,\alpha}_{\mathcal{L}}$, occorre provare preliminarmente che a e b sono di classe $C^{3,\alpha}_{\mathcal{L}}$. Si ha infatti

Proposizione 4.1 *Se u è soluzione di (4) di classe $C^{3,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$ tale che $\partial_t u \in C^{1,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$, allora a e b sono di clase $C^{3,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$.*

Prova Poiché ciascuno dei termini che compaiono nella formula di rappresentazione enunciata nel Teorema 4.1 può essere derivato rispetto a X o Y, allora questa può essere considerata una formula di rappresentazione per Xu e Yu. D'altra parte

$$Xu = -b \quad \text{e} \quad Yu = a$$

e, quindi, derivando direttamente i vari termini della formula, si ottiene la tesi.

Iterando il procedimento si provano le seguenti proposizioni

Proposizione 4.2 *Se u è soluzione di (4) di classe $C^{3,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$ tale che $\partial_t u \in C^{1,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$, allora Xu, Yu e $\partial_t u$ sono di classe $C^{4,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$.*

prova del Teorema 1.1

Derivando entrambi i membri di (4) rispetto a X si verifica che Xu è soluzione dell'equazione

$$L_u Xu = Y\Big(\frac{\mathcal{L}u}{1+u_t^2}u_t\Big) - u_t X\Big(\frac{\mathcal{L}u}{1+u_t^2}u_t\Big) \tag{14}$$

$$+X\mathcal{L}u - (1+u_t^2)\mathcal{L}u\partial_t Yu.$$

Per la Proposizione 4.2 si ha che $Xu \in C^{4,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$ e, poiché anche $\partial_t u \in C^{4,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$, il secondo membro di (14) è di classe $C^{3,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$. Pertanto $Xu \in C^{5,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$. Analogamente Yu risulta di classe $C^{5,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$. D'altra parte $\partial_t u$ è soluzione di un'equazione del tipo

$$\tilde{L}_u \partial_t u = -2\partial_t Yu X\partial_t u + 2\partial_t Xu Y\partial_t u - \tag{15}$$

$$-\partial_t\big(k(1+|Xu|^2+|Yu|^2)^{3/2}\big)(1+|\partial_t u|^2)^{1/2}.$$

dove l'operatore $\tilde{L}_u$ ha la stessa struttura di L_u, e poiché il secondo membro di (15) è di classe $C^{3,\alpha}_{\mathcal{L},loc}$, allora $\partial_t u \in C^{5,\alpha}_{\mathcal{L},loc}(\Omega)$. Iterando il procedimento si ottiene la tesi.

5 References

[BG] E.Bedford, B.Gaveau, *Envelopes of holomorphy of certain 2-spheres in C^2*, Am. J. of Math., **105**, 1983, 975-1009.

[C] G.Citti, *C^∞ regularity of solutions of the Levi equation*, to appear on Analyse nonlinaire, Ann. dell'H.I.P.

[CM] G.Citti, A.Montanari, *Regularity for non Levi-flat graphs*, preprint.

[F] G.b.Folland, *Subelliptic estimates and function on nilpotent Lie groups*, Arkiv f. Mat., **13**, 1975, 161-207.

[FS] G.B. Folland, E.M.Stein, *Estimates for the $\bar{\partial}_b$ Complex and Analysis on the Heisenberg Group*, Comm. Pure Appl. Math., **20**, 1974, 429 - 522.

[NSW] A.Nagel, E.M.Stein, S.Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties*, Acta Math., **155**, 1985, 103-147.

[RS] L.Rothschild, E.M.Stein, *Hypoelliptic differential operators and nihilpotent Lie groups*, Acta Math., **137**, 1977, 247-320.

[ST] Z.Slodkowski, G.Tomassini, *Weak solutions for the Levi equation and Envelope of Holomorphy*, J. Funct. Anal, **101**, no. 4, 1991, 392-407.